(b) Show that the vector $\vec{f} = (\sin y + z)i + (x\cos y - z)j + (x - y)k$ is irrotational.

दर्शाइए कि वैक्टर $\vec{f} = (\sin y + z)i + (x\cos y - z)j + (x - y)k$ अघूर्णीय है ।

Unit II

इकाई II

4. (a) Evaluate $\iint_S \phi \vec{n} dS$, where $\phi = \frac{8}{3}xyz$ and S is the surface of cylinder $x^2 + y^2 = 16$ included in the first octant between $z = 0$ to $z = 5$.

$\iint_S \phi \vec{n} dS$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $z = 0$ तथा $z = 5$ के मध्य प्रथम ऑक्टेंट में शामिल बेलन $x^2 + y^2 = 16$ का समतल $\phi = \frac{8}{3}xyz$ तथा S है ।

Subject Code—0959

B. A. (First Year) EXAMINATION

(For Batch 2018 Onwards)

VECTOR ANALYSIS AND GEOMETRY

BA107

Paper III

Time : 3 *Hours* *Maximum Marks :* 18/21

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question from each Unit. Q. No. **1** is compulsory.

प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न क्र. **1** अनिवार्य है ।

1. (a) Find the unit tangent vector to any point on the curve $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt.$

वक्र $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ तथा $z = bt$ पर किसी बिन्दु के लिए इकाई स्पर्श रेखा वैक्टर ज्ञात कीजिए ।

(b) Write the statement of Green's theorem.

ग्रीन प्रमेय का विवरण लिखिये ।

(c) Write the equation of circle with radius a and touching the initial line at pole.

खम्भे पर प्रारम्भिक रेखा स्पर्श करते हुए त्रिज्या a के साथ वृत्त का समीकरण लिखिए।

(d) Find the equation of sphere whose centre is (1, –2, 3) and radius 4.

गोले का समीकरण जिसका केन्द्र (1, –2, 3) तथा त्रिज्या 4 है, ज्ञात कीजिए ।

Unit I
इकाई I

2. (a) Show that $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right), \vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$ and $\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ are coplanar.

दर्शाइए कि $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right), \vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$ तथा $\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ कोप्लानर हैं ।

(b) The necessary and sufficient condition for the vector function $\vec{f}$ of a scaler variable t to have a constant magnitude is $\vec{f}.\frac{df}{dt} = 0$.

सतत् परिमाण वाले स्केलर चर t के वैक्टर फंक्शन $\vec{f}$ के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त दशा $\vec{f}.\frac{df}{dt} = 0$ है ।

3. (a) Find the directional derivative of $\phi(x, y, z) = x^2yz + 4xz^2$ at the point (1, –2, 1) in the direction of $2i - j - 2k$.

$2i - j - 2k$ की दिशा में बिन्दु (1, –2, 1) पर $\phi(x, y, z) = x^2yz + 4xz^2$ का निर्देशात्मक व्युत्पन्न ज्ञात कीजिए ।

Unit IV

इकाई IV

8. (a) Prove that the sum of the squares of the reciprocals of any three mutually perpendicular diameters of an ellipsoid is constant.

सिद्ध कीजिए कि एक दीर्घवृत्त के किन्हीं भी तीन परस्पर लंबित व्यास के पारस्परिक वर्गों का योग स्थिर है ।

(b) Find the equations to the generators of the paraboloid $(x + y + z)(2x + y - z) = 6z$, which passes through the point (1, 1, 1).

परवलय $(x + y + z)(2x + y - z) = 6z$, के जनकों के लिए समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (1, 1, 1) के माध्यम से गुजरता है ।

(b) Evaluate $\iiint_V (2x + y)\,dV$, where V is closed the region bounded by cylinder $z = 4 - x^2$ and the planes, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ and $z = 0$.

$\iiint_V (2x + y)\,dV$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ बेलन $z = 4 - x^2$ तथा समतल $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ तथा $z = 0$ द्वारा आबद्ध क्षेत्र V संवृत्त है ।

5. (a) Verify Stoke's theorem for the function $\vec{f} = x^2 i + xyj$, integrated around the square in the plane $z = 0$ whose sides are along the line $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ and $y = a$.

समतल $z = 0$ में वर्ग के आसपास एकीकृत, फंक्शन $\vec{f} = x^2 i + xyj$ के लिए स्टोक प्रमेय सत्यापित कीजिए जिसकी भुजाएँ रेखा $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ तथा $y = a$ के संलग्न हैं ।

(b) Evaluate $\iint_S \vec{f}.\vec{n}d\text{S}$ with the help of Gauss divergence theorem for $\vec{f} = 4xyi + yzj - xzk$ taken over surface S of cube bounded by planes $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ and $z = 2$.

समतल $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0$ तथा $z = 2$ के द्वारा परिबद्ध घन समतल S के ऊपर $\vec{f} = 4xyi + yzj - xzk$ के लिए गाउस विचलन प्रमेय की सहायता से $\iint_S \vec{f}.\vec{n}d\text{S}$ का मूल्यांकन कीजिए ।

Unit III
इकाई III

6. (a) Find the asymptotes of hyperbola $6x^2 - 7xy - 3y^2 - 2x - 8y - 6 = 0$. Find also equation of conjugate hyperbola.

अतिपरवलय $6x^2 - 7xy - 3y^2 - 2x - 8y - 6 = 0$ के एसिम्प्टोट्स ज्ञात कीजिए । संयुग्मन अतिपरवलय का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

(b) Trace the conic $8x^2 - 4xy - 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$.

शंकु $8x^2 - 4xy - 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$ को ट्रेस कीजिए ।

7. (a) Find the equation of parabola which touches the conic $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ at the point where it is cut by line $x + y + 1 = 0$.

परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो शंकु $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ को एक बिन्दु पर स्पर्श करता है, जहाँ यह रेखा $x + y + 1 = 0$ द्वारा काटी जाती है ।

(b) Prove that the locus of the intersection of perpendicular tangents to a conic is a circle.

सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के लम्बवत् स्पर्श रेखा का प्रतिच्छेदन केन्द्र बिन्दु एक वृत्त है ।

9. (a) Show that the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 10z + 225 = 0$ touch and find the co-ordinates of there common points.

दर्शाइए कि गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ तथा $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 10z + 225 = 0$ स्पर्श करते हैं तथा उनके सामान्य बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

(b) Find the equation of the right circular cylinder, whose guiding circle if $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$.

समकोण वृत्ताकार बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका मार्गदर्शन वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ है ।

9. (a) Show that the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 10z + 225 = 0$ touch and find the co-ordinates of there common points.

दर्शाइए कि गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ तथा $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 10z + 225 = 0$ स्पर्श करते हैं तथा उनके सामान्य बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

(b) Find the equation of the right circular cylinder, whose guiding circle if $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$.

समकोण वृत्ताकार बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका मार्गदर्शन वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ है ।